

METODI IZRAČUNAVANJA ODREĐENIH INTEGRALÂ NESVOJSTVENI INTEGRALI

§ 1. Metodi tačnog izračunavanja integrala

Neposredna primena Njutn-Lajbnicove formule

U zadacima 2231 — 2258 izračunati integrale.

$$2231. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

$$2232. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

$$2233. \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[4]{(3-x)^4}}.$$

$$2234. \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy.$$

$$2235. \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) dt.$$

$$2236. \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$$

$$2237. \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx.$$

$$2238. \int_0^{2a} \frac{3 dx}{2b-x} \quad (b > a > 0).$$

$$2239. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$2240. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$$

$$2241. \int_1^e \frac{1+\lg x}{x} dx.$$

$$2242. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$$

$$2243. \int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}.$$

$$2244. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$2245. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^4 dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$$

$$2246. \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a dx}{(x-a)(x-2a)}$$

$$2247. \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$$

$$2248. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$2249. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$$

$$2250. \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$$

$$2251. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$2252. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$$

$$2253. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x + \cos^3 x} dx$$

$$2254. \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x + \varphi_0) dx$$

$$2255. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$$

$$2256. \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 \varphi d\varphi$$

$$2257. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$$

$$2258. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt$$

Izračunavanje određenog integrala metodom parcijalne integracije

U zadacima 2259—2268 naći integrale.

$$2259. \int_0^1 xe^{-x} dx$$

$$2260. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$2261. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$2262. \int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx.$$

$$2263. \int_1^2 x \log_2 x \, dx.$$

$$2264. \int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx.$$

$$2265. \int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{c^2 + x^2}}.$$

$$2266. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

$$2267. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx.$$

$$2268. \int_1^e \ln^3 x \, dx.$$

2269. Izvesti rekurentne obrasce za $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ (n je ceo pozitivan broj ili nula) i izračunati integrale:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx; \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \, dx; \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x \, dx.$$

2270. Izvesti rekurentni obrazac za izračunavanje integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$ (m i n su celi pozitivni brojevi ili nule; ispitati posebne slučajeve kad su m i n parni i neparni).

2271. Izvesti rekurentni obrazac za $\int_{-1}^0 x^n e^x \, dx$ (n je ceo pozitivan broj ili nula).

2272. Dokazati rekurentni obrazac

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n je ceo pozitivan broj ili nula), i primenom ovog obrasca izračunati

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$$

2273. Dokazati da: ako je $J_m = \int_1^e \ln^m x \, dx$, onda je $J_m = e - m J_{m-1}$ (m je ceo pozitivan broj ili nula).

2274*. Naći $\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$ (p i q su celi pozitivni brojevi).

Smena promenljive u određenom integralu

U zadacima 2275—2295 naći integrale.

$$2275. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx. \quad 2276. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}. \quad 2277. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$2278. \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}. \quad 2279. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}. \quad 2280. \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

$$2281^*. \int_0^\pi \sin^6 \frac{x}{2} dx. \quad 2282^*. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx.$$

$$2283. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}. \quad 2284. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

$$2285. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx. \quad 2286. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$2287. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}. \quad 2288. \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

$$2289. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \quad 2290. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx.$$

$$2291. \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2-x^2}}. \quad 2292. \int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$2293. \int_{2.5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx. \quad 2294. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2295. \int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x \sqrt{(x^2-2)^5}}.$$

2296. Izračunati srednju vrednost funkcije $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ u intervalu $[1, 4]$.

2297. Izračunati srednju vrednost funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ u intervalu $[1; 1,5]$.

2298. Izračunati srednju vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \sin^2 x$ u intervalu $[0, \pi]$.

2299. Izračunati srednju vrednost funkcije $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ u intervalu $[0, 2]$.

2300. Koliko mora biti a da bi srednja vrednost funkcije $y = \ln x$ u intervalu $[1, a]$ bila jednaka srednjoj brzini menjanja funkcije u tom intervalu?

U zadacima 2301—2317 naći integrale.

$$2301. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3} \qquad 2302. \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}$$

$$2303. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2} \qquad 2304. \int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15} dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$$

$$2305. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} \qquad 2306. \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$2307. \int_0^{-1} \sqrt{2x+x^2} dx \qquad 2308. \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$2309. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx \qquad 2310. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$2311. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx \qquad 2312. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} \qquad 2313. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \frac{1}{6} \sin^2 x}$$

$$2314. \int_0^1 (\arcsin x)^4 dx \qquad 2315. \int_1^{16} \arctg \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$$

$$2316. \int_0^1 \frac{(3x+2) dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}} \qquad 2317. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

2318. Pokazati da je $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab| dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2}$, pri čemu su a i b proizvoljni realni brojevi različiti od nule.

2319. Rešiti jednačinu $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}$.

2320. Rešiti jednačinu $\int_{\ln 2}^x \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\pi}{6}$.

2321. Uverivši se da za $x > e$ važe nejednakosti $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ pokazati da

je vrednost integrala $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ manja od 1, ali veća od 0,92.

2322.* Pokazati da je

$$\frac{\pi}{6} \approx 0,523 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \approx 0,555.$$

2323.* Pokazati da je

$$0,5 < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6} \approx 0,523 \quad (n \geq 1).$$

2324. Koristeći nejednakost $|\sin x| > x - \frac{x^3}{6}$, koja važi za $x > 0$, i nejed-

nakost Bunjakovskog (vidi zad. 1638) oceniti integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x} dx$.

2325. Pokazati da je $0,78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0,93$.

2326. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $J(x) = \int_0^x \frac{2x+1}{x^2-2x+2} dx$

u intervalu $[-1, 1]$.

2327. Naći tačku ekstremuma i prevojne tačke grafika funkcije $y = \int_0^x (x-1)(x-2)^2 dx$.

U zadacima 2328—2331, bez izračunavanja integrala, dokazati da važe nejednakosti:

$$2328. \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \sin^9 x \, dx = 0.$$

$$2329. \int_{-1}^1 \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x} \, dx = 0.$$

$$2330. \int_{-1}^1 e^{\cos x} \, dx = 2 \int_0^1 e^{\cos x} \, dx. \quad 2331. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx = 0.$$

2332*. a) Pokazati da, ako je funkcija $f(t)$ neparna, onda je $\int_a^x f(t) \, dt$ parna funkcija, tj. $\int_a^x f(t) \, dt = \int_a^{-x} f(t) \, dt$.

b) Hoće li $\int_a^x f(t) \, dt$ biti neparna funkcija ako je $f(t)$ parna?

2333*. Dokazati da je za svako $x > 0$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$$

2334. Dokazati da važi identitet

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t \, dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

2335. Dokazati da važi identitet

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

2336. Dokazati da je

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx.$$

2337. Dokazati da je

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx.$$

2338. Uveriti se da je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

i koristeći se ovim rezultatom izračunati integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \text{ i } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

2339*. Uveriti se da je

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

i koristeći se ovim rezultatom izračunati integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

2340*. Pokazati da ako je funkcija $f(x)$ periodična sa periodom T , onda

$\int_a^{a+T} f(x) dx$ ne zavisi od a .

2341*. Dokazati da ako je funkcija $f(x)$ neparna u intervalu $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$

i ima period T , onda je i $\int_a^x f(x) dx$ periodična funkcija sa periodom T .

2342. Izračunati $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ (n je ceo pozitivan broj) na dva načina:

razvijanjem podintegralne funkcije po binomnom obrascu, i smenom $x = \sin \varphi$. Upoređivanjem rezultata izvesti sledeći sumacioni obrazac:

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

2343. Integral $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3 \cos x}$ je lako izračunati smenom $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$. Do-

bija se:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3 \cos x} = \int_0^0 \frac{2 dz}{(1+z^2) \left(5-3 \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$$

Međutim je: $-3 < -3 \cos x < +3$, i prema tome $2 < 5 - 3 \cos x < 8$, odnosno $\frac{1}{2} > \frac{1}{5 - 3 \cos x} > \frac{1}{8}$, pa odavde proizlazi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx > \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \cos x} > \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} dx,$$

i dakle: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \cos x} > \frac{\pi}{4}$. Naći grešku u rasuđivanju.

2344*. Neka je $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x dx$ (n je ceo broj veći od 1); uveriti se da je

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \text{ i dokazati da je } \frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}.$$

2345*. Dokazati da je

$$\int_0^x e^{zx} e^{-z^2} dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-z^2} dz.$$

2346*. Dokazati da je

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{e^{k\omega^2 x^2}}{b} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < b^a, \\ \infty, & \text{ako je } x = b \end{cases} \quad (\omega > 0, k > 0, b > 0).$$

§ 2. Približni metodi izračunavanja određenih integrala

U zadacima 2347 — 2349 račune izvoditi sa tačnošću do 0.001.

2347. Površina četvrtine kruga, čiji je poluprečnik 1 iznosi $\frac{\pi}{4}$. S druge strane, uzmemo li jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku, čija je jednačina $x^2 + y^2 = 1$, i izrazimo li površinu njegove četvrtine pomoću integrala, dobićemo

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad \text{tj.} \quad \pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Izračunati približnu vrednost broja π primenom „pravila pravougaonika“, tetivnog i Simpsonovog pravila, deleći interval integracije $[0, 1]$ na 10 jednakih delova, i uporediti dobijene rezultate među sobom i sa vrednošću iz tablica.

2348. Znajući, da je $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ izračunati približno vrednost broja π

deleći interval $[0, 1]$ na 10 jednakih delova, i rezultate dobijene primenom raznih pravila za približno izračunavanja određenih integrala uporediti među sobom i sa vrednošću iz tablica.

2349. Izračunati $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$ po Simpsonovu pravilu za $n=10$, a zatim

izračunati moduo prelaza sa prirodnih na dekadne logaritme i uporediti sa vrednostima iz tablica.

U zadacima 2350 — 2355 izračunati približno, primenom Simpsonove formule, vrednosti integrala koje se ne mogu izračunati u zatvorenom obliku pomoću elementarnih funkcija. Broj podintervala (n) dat je (u zagradama) posebno za svaki integral.

2350. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$ ($n=10$).

2351. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$ ($n=10$).

2352. $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ ($n=6$).

2353. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi$ ($n=10$).

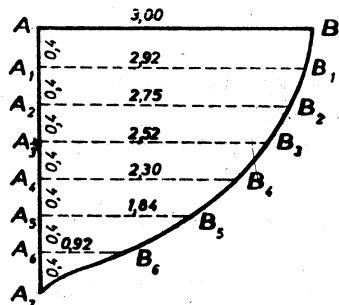
2354. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0,1 \sin^2 \varphi} d\varphi$ ($n=6$).

2355. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx$ ($n=10$).

2356. Izračunati po Simpsonovoj formuli integral $\int_{1,05}^{1,35} f(x) dx$ koristeći vrednosti funkcije $f(x)$ date sledećom tablicom:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

2357. Prava linija preseca obalu reke u tačkama A i B . U cilju premeravanja površine zemljišta između reke i prave AB izmereno je 11 normala povučениh iz tačaka obale na pravu AB , na rastojanju od po 5 m između svake dve uzastopne normale (prema tome rastojanje AB iznosi 60 m); dužine tih normala su: 3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24 m. Izračunati približno površinu zemljišta.



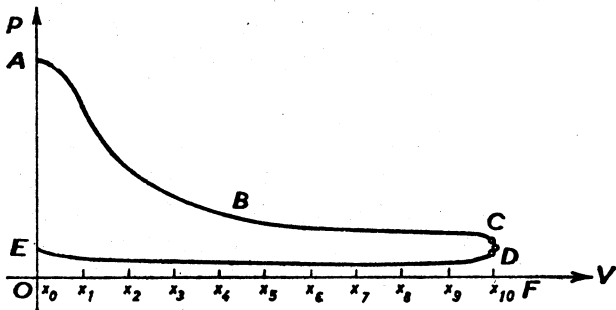
Sl. 39

2358. Izračunati približno površinu prečnog preseka broda iz sledećih podataka (sl. 39):

$$AA_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5 = A_5 A_6 = A_6 A_7 = 0,4 \text{ m},$$

$$AB = 3 \text{ m}, \quad A_1 B_1 = 2,92 \text{ m}, \quad A_2 B_2 = 2,75 \text{ m}, \\ A_3 B_3 = 2,52 \text{ m}, \quad A_4 B_4 = 2,30 \text{ m}, \quad A_5 B_5 = 1,84 \text{ m}, \\ A_6 B_6 = 0,92 \text{ m}.$$

2359. Da bi se izračunao rad pare u cilindru parne mašine izračunava se površina indikatorskog dijagrama, koji prikazuje grafički zavisnost između



Sl. 40

pritiska pare i hoda klipa. Na sl. 40 dat je indikatorski dijagram parne mašine. Ordinate tačaka krivih ABC i ED koje odgovaraju apscisama x_0, x_1, \dots, x_{10} , date su u sledećoj tablici:

Apscise	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ordinate krive ABC	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0
„ „ ED	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8
Apscise	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
Ordinate krive ABC	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2	
„ „ ED	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7	

Izračunati po Simpsonovoj formuli površinu ABCDE. Ordinate su date u milimetrima. Dužina $OF = 88,7 \text{ mm}$ (tačka F je zajednička projekcija tačaka C i D na apscisnu osu).

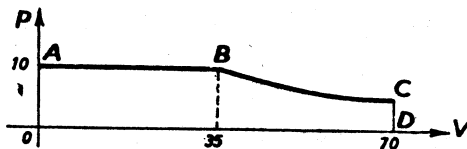
U zadacima 2360—2363 pri određivanju granica integracije potrebno je primeniti metode približnog rešavanja jednačina.

2360. Izračunati površinu ograničenu lucima parabola $y = x^3 - 7$ i $y = -2x^2 + 3x$ i ordinatnom osom.

2361. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = x^3$ i pravom $y = 7(x + 1)$.

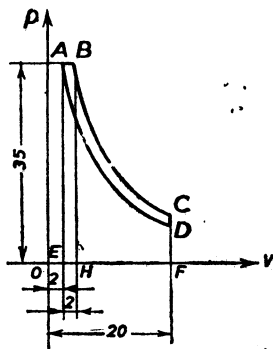
2362. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = 16 - x^2$ i semikubnom parabolom $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Izračunati površinu ograničenu krivama $y = 4 - x^4$ i $y = \sqrt[3]{x}$.



Sl. 41

2364. Na sl. 41 dat je indikatorski dijagram parne mašine (upročćen). Na osnovu podataka ubeleženih na crtežu (u mm) izračunati površinu $ABCD$, ako se zna jednačina krive BC : $pv^\gamma = \text{const}$ (kriva BC zove se adijabata), $\gamma = 1,3$, dok je AB prava paralelna osi Ov .



Sl. 42

2365. Na sl. 42 dat je indikatorski dijagram dizel motora; odsečak AB odgovara procesu sagorevanja nafte, adijabata BC — ekspanziji, odsečak CD — ispuštanju, i adijabata DA — kompresiji gasa. Jednačina adijabate BC je: $pv^{1,3} = \text{const}$. jednačina adijabate AB : $pv^{1,35} = \text{const}$. Na osnovu podataka ubeleženih na crtežu (u mm) izračunati površinu $ABCD$.

§ 3. Nesvojstveni integrali

Integrali s beskonačnim granicama

U zadacima 2366 — 2385 izračunati donje nesvojstvene integrale (ili ustanoviti njihovu divergenciju).

$$2366. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}. \quad 2367. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 2368. \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \quad (a > 0).$$

$$2369. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}. \quad 2370. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}. \quad 2371. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$2372. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}. \quad 2373. \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx \quad 2374. \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2375. \int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad 2376. \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx. \quad 2377. \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$2378. \int_0^{\infty} x \sin x dx. \quad 2379. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx. \quad 2380. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$2381. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx. \quad 2382. \int_1^{\infty} \frac{\text{arctg } x}{x^2} dx. \quad 2383. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$2384. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}. \quad 2385. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

U zadacima 2386 — 2393 ispitati da li su dati integrali konvergentni.

$$2386. \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx.$$

$$2387. \int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx.$$

$$2388. \int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} dx.$$

$$2389. \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx.$$

$$2390. \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

$$2391. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^4}} dx.$$

$$2392. \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}.$$

$$2393. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrali neograničenih funkcija

U zadacima 2394 — 2411 izračunati date nesvojtvene integrale (il ustanoviti njihovu divergenciju).

$$2394. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2395. \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$2396. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$2397. \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$2398. \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$2399. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$2400. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$2401. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b).$$

$$2402. \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b).$$

$$2403. \int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}.$$

$$2404. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2405. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2406. \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^2}} dx.$$

$$2407. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx. \quad 2408. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^5}} dx.$$

$$2409. \int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx. \quad 2410. \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx. \quad 2411. \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

U zadacima 2412 — 2417 ispitati da li su dati integrali konvergentni.

$$2412. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx. \quad 2413. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}}. \quad 2414. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

$$2415. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}. \quad 2416. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}. \quad 2417. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Razni zadaci

2418. Funkcija $f(x)$ je neprekidna u intervalu $[a, \infty)$ i uz to $f(x) \rightarrow A \neq 0$ kad $x \rightarrow \infty$. Može li integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konvergirati?

2419. Za koje će vrednosti parametra k integral $\int_1^{\infty} x^k \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx$ biti konverentan?

2420. Za koje su vrednosti parametra k integrali

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^k \ln x} \quad \text{i} \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k}$$

konvergentni?

2421. Za koje će vrednosti parametra k integral $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ ($b > a$) biti konverentan?

2422. Može li se k odrediti tako da integral $\int_0^{\infty} x^k dx$ bude konverentan?

2423. Za koje će vrednosti parametara k i t integral $\int_0^{\infty} \frac{x^k}{1+x^t} dx$ biti konverentan?

2424. Za koje je vrednosti parametra m integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m} dx$ konvergentan?

2425. Za koje je vrednosti parametra k integral $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$ konvergentan?

U zadacima 2426—2435 izračunati date nesvojstvene integrale.

2426. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. 2427*. $\int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1) dx}{\sqrt[4]{(x-1)^4}}$. 2429. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ (n je ceo pozitivan broj).

2430. $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ (n je ceo pozitivan broj).

2431. $\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$ (n je ceo pozitivan broj).

2432. $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ (n je ceo pozitivan broj).

2433*. $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ kad je m : a) paran broj; b) neparan broj ($m > 0$).

2434*. $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$ (n je ceo pozitivan broj).

2435. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-\cos \alpha)\sqrt{x^2-1}}$ ($0 < \alpha < 2\pi$).

2436*. Dokazati da je $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Dokazati da je $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0$.

2438. Izračunati integral $\int_1^{\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$.

U zadacima 2439—2448 izračunati date integrale koristeći obrasce:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{Puasonov integral})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Dirihle-ov integral})$$

2439. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx \ (a > 0)$. 2440. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.

2441*. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$.

2442. $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$ (n je ceo pozitivan broj).

2443. $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$. 2444. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$.

2445. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \ (a > 0, b > 0)$.

2446*. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$. 2447*. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$. 2448*. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$.

2449*. Stavimo $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos y dy$ (Ovaj se integral zove Integral Lobačevskog). Dokazati relaciju

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x \ln 2.$$

Pomoću ove relacije izračunati integral

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y dy$$

(prvi ga e izračunao Ojler).

U zadacima 2450—2454 izračunati date integrale.

$$2450. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx.$$

$$2451. \int_0^{\pi} x \ln \sin x \, dx.$$

$$2452^*. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x \, dx.$$

$$2453^*. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \, dx.$$

$$2454. \int_0^1 \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

REZULTATI

$$2231. \frac{2}{3}(\sqrt[5]{8}-1). \quad 2232. \frac{7}{72}. \quad 2233. -5(\sqrt[5]{16}-1). \quad 2234. 7\frac{2}{3}.$$

$$2235. \frac{7}{\pi} \cos \varphi_0. \quad 2236. 12. \quad 2237. 0,2(e-1)^5. \quad 2238. 3 \ln \frac{b}{b-a}.$$

$$2239. \frac{1}{4}. \quad 2240. \frac{\pi}{2}. \quad 2241. 1 + \frac{1}{2} \lg e. \quad 2242. e - \sqrt{e}. \quad 2243. \frac{\pi}{6n}.$$

$$2244. 2. \quad 2245. \frac{4}{3}. \quad 2246. \ln \frac{3}{2}. \quad 2247. 0,2 \ln \frac{4}{3}. \quad 2248. \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

$$2249. \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}. \quad 2250. \frac{\pi}{6}. \quad 2251. 2. \quad 2252. \frac{2}{7}. \quad 2253. \frac{4}{3}.$$

$$2254. \frac{\pi}{2\omega}. \quad 2255. -0,083 \dots \quad 2256. \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{3} - \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2257. 1. \quad 2258. -\frac{\sqrt{2}}{3}. \quad 2259. 1 - \frac{2}{e}. \quad 2260. \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$2261. \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \quad 2262. \pi^3 - 6\pi. \quad 2263. 2 - \frac{3}{4 \ln 2}.$$

$$2264. 1. \quad 2265. \frac{141 a^3 \sqrt[3]{a}}{20}. \quad 2266. \frac{\pi a^2}{4}. \quad 2267. \frac{e^{\pi-2}}{5}. \quad 2268. 6-2e.$$

$$2269. \text{ a) } \frac{8}{15}; \text{ b) } \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \approx 0.429; \text{ c) } \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{256}{693}.$$

$$2270. J_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n}.$$

Ako je n neparan broj, onda je

$$J_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(m+3)(m+1)};$$

ako je m neparan broj, onda je

$$J_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\dots 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(n+3)(n+1)};$$

ako je m paran broj, onda je

$$J_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1 \cdot (m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$2271. (-1)^n n! \left[1 - \frac{1}{e} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{1!} + 1 \right) \right]$$

$$2272. \frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}. \quad 2274^*. \frac{p!q!}{(p+q+1)!}. \text{ Staviti } x = \sin^2 z \text{ i iskoristiti rezultat zadatka 2270.}$$

$$2275. 7 + 2 \ln 2. \quad 2276. 2 - \frac{\pi}{2}. \quad 2277. \frac{32}{3}.$$

$$2278. \frac{5}{3} - 2 \ln 2. \quad 2279. \ln \frac{e + \sqrt{1+e^2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad 2280. 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi.$$

$$2281^*. \frac{5}{16} \pi. \text{ Stavljajući } x = 2z \text{ transformišemo dati integral u } 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx.$$

$$2282^*. \frac{8}{35}. \text{ Staviti } x = \frac{z}{2}. \quad 2283. \frac{\pi}{32}.$$

$$2284. \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}. \quad 2285. \frac{8}{15}. \quad 2286. \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

$$2287. \frac{1}{32} \left(\pi + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 8 \right). \quad 2288. \frac{3}{16} \pi. \quad 2289. \frac{\pi}{16}.$$

$$2290. \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3}). \quad 2291. \frac{\pi}{4}. \quad 2292. \frac{\sqrt{3}}{24}. \quad 2293. \frac{\pi}{3}.$$

$$2294. \arctg \frac{1}{2}. \quad 2295. \frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{49}. \quad 2296. \frac{20}{9}.$$

$$2297. 2 \ln \frac{6}{5} \approx 0.365. \quad 2298. \frac{2}{\pi}; \frac{1}{2}. \quad 2299. 2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}.$$

$$2300. \text{ Kod } a = e. \quad 2301. \frac{1}{2} \ln \frac{5}{8}. \quad 2302. \frac{2}{45}.$$

$$2303. 8 \ln 3 - 15 \ln 2 + \frac{13}{8}. \quad 2304. \frac{5}{192} (5 + 7\sqrt{5}). \quad 2305. \frac{\pi}{6}.$$

$$2306. a^2 [\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]. \quad 2307. \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}). \quad 2308. \frac{848}{105}.$$

$$2309. 4 - \pi. \quad 2310. \ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}. \quad 2311. \frac{\pi}{4} \frac{1}{2}.$$

$$2312. \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad 2313. \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6}{7}}. \quad 2314. \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$$

$$2315. \frac{16\pi}{2} - 2\sqrt{3}. \quad 2316. \frac{19}{27} \frac{5}{6\sqrt{6}}. \quad 2317. \frac{1}{a^2 - b^2} \ln \left| \frac{a}{b} \right|.$$

$$2319. x - 2. \quad 2320. x - \ln 4.$$

2322*. Iskoristiti relaciju $4 - x^2 \geq 4 - x^2 - x^2 \geq 4 - 2x^2$, koja važi za $0 \leq x \leq 1$.

2323. Iskoristiti nejednakosti $\sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{1 - x^{2n}} \leq 1$, koje važe za $-1 \leq x \leq 1$ i $n \geq 1$.

$$2324. 1,098 < I < 1,110.$$

2325*. Pri određivanju donje granice iskoristiti nejednačinu $1 + x^4 < (1 + x^2)^2$, a pri određivanju gornje — primeniti nejednačinu Bunjakovskog.

2326. Najveća vrednost $I(1) \approx 1,66$; najmanja vrednost $I\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,11$.

2327. Minimum za $x = 1 \left(y = -\frac{17}{22}\right)$, prevojna tačka $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ i $\left(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81}\right)$.

2332*. a) Zameniti integracionu promenljivu shodno obrascu $t = -x$, razbiti interval integracije na dva intervala $[-a, a]$ i $[a, -x]$, i uzeti u obzir da je integral neparne funkcije u intervalu $[-a, a]$ jednak nuli; b) neće, ako je $a \neq 0$, a hoće ako je $a = 0$.

2333*. Staviti $t = \frac{1}{x}$. 2338. Vrednost svakog od integrala je $\frac{\pi}{4}$.

2339*. Staviti $x = \pi - z$. Integral je jednak $\frac{\pi^2}{4}$.

2340*. Razbiti interval integracije $[a, a + T]$ na intervale $[a, 0]$, $[0, T]$ i $[T, a + T]$, a zatim koristeći svojstvo $f(x) = f(x + T)$ pokazati da je

$$\int_0^a f(x) dx = \int_T^{\infty T} f(x) dx.$$

2341*. Jednakost koju treba dokazati ekvivalentna je jednakosti

$$\int_x^{x+T} f(z) dz = 0.$$

Uveriti se da integral na levoj strani ove jednakosti ne zavisi od x , a zatim staviti $x = -\frac{T}{2}$.

$$2342. \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

2343. Spomena $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ne može se primeniti onako kako je to učinjeno u zadatku

zato što je funkcija $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ prekidna za $x = \pi$.

2344*. Za ocenu integrala I_n iskoristiti činjenicu da I_n opada kad n raste.

2345*. Zameniti integracionu promenljivu shodno obrascu $z = \frac{x+f}{2}$ i uzeti u obzir osobinu integrala parne funkcije.

2346*. Zameniti integracionu promenljivu shodno obrascu $z = k \omega^2 x^2$ a zatim primeniti Lopitalovo pravilo.

2347. Po „pravilu pravougaonika“ $\pi \approx 2,904$ (donja približna vrednost) i $\pi \approx 3,305$ (gornja približna vrednost); po tetivnom pravilu $\pi \approx 3,104$; po Simpsonovoj formuli $\pi \approx 3,127$.

2348. Po „pravilu pravougaonika“ $\pi \approx 3,04$ (donja približna vrednost) i $\pi \approx 3,24$ (gornja približna vrednost). Po tetivnom pravilu $\pi \approx 3,140$. Po Simpsonovoj formuli $\pi \approx 3,1416$ (sve su cifre pouzdane).

2349. $\ln 10 \approx 2,31$, $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,433$. 2350. $\approx 0,837$. 2351. $\approx 1,09$.

2352. $\approx 2,59$. 2353. $\approx 0,950$. 2354. $\approx 1,53$. 2355. $\approx 0,985$. 2356. $\approx 0,957$.

2357. $\approx 239 \text{ m}^2$ (po Simpsonovoj formuli). 2358. $\approx 5,7 \text{ m}^2$ (Po Simpsonovoj formuli).

2359. $\approx 1950 \text{ mm}^2$. 2360. $\approx 10,9$. 2361. $\approx 36,2$. 2362. $\approx 98,2$.

2363. $\approx 9,2$. 2364. $\approx 569 \text{ mm}^2$. 2365. $\approx 138 \text{ mm}^2$. 2366. $\frac{1}{3}$.

2367. Divergira. 2368. $\frac{1}{a}$. 2369. Divergira. 2370. π . 2371. Divergira.

2372. $1 - \ln 2$. 2373. $\frac{1}{2}$. 2374. $\frac{\pi}{4}$. 2375. $\ln \frac{\sqrt{a^2+1}+1}{a^2}$.

2376. $\frac{1}{2}$. 2377. $\frac{1}{2}$. 2378. Divergira. 2379. 2. 2380. $\frac{1}{2}$.

2381. $\frac{a}{a^2+b^2}$, ako je $a > 0$, a ne postoji ako je $a < 0$. 2382. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

2383. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 2384. $\frac{\pi}{2}$. 2385. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. 2386. Konvergira.

2387. Divergira. 2388. Konvergira. 2389. Divergira. 2390. Konvergira.

2391. Divergira. 2392. Divergira. 2393. Konvergira. 2394. $\frac{\pi}{2}$.

2395. Divergira. 2396. $\frac{8}{3}$. 2397. $-\frac{1}{4}$. 2398. 1. 2399. Divergira.

2400. 2. 2401. π . 2402. $\frac{1}{2} \pi (a+b)$. 2403. $\frac{33\pi}{2}$. 2404. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

2405. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 2406. $14 \frac{4}{7}$. 2407. $\frac{10}{7}$. 2408. Divergira.

2409. $6 - \frac{9}{2} \ln 3$. 2410. $-\frac{2}{e}$. 2411. Divergira. 2412. Konvergira.

2413. Divergira. 2414. Konvergira. 2415. Konvergira. 2416. Divergira.

2417. Konvergira. 2418. Ne može. 2419. Za $k < -1$ konvergira, a za $k > -1$ divergira.

2420. 1) Za $k > 1$ konvergira, za $k < 1$ divergira.

$$2) I = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}, \text{ ako je } k > 1; \text{ divergira ako je } k < 1.$$

2421. Za $k < 1$ konvergira, za $k > 1$ divergira.

2422. Ne može. 2423. Za $-1 < k < t - 1$.

2424. Za $m < 3$ konvergira, za $m > 3$ divergira.

2425. Za $k < 1$ konvergira, za $k > 1$ divergira.

2426. π . 2427*. $\frac{5\pi}{3}$. Staviti $x = \cos \varphi$ i primeniti parcijalnu integraciju.

$$2428. \frac{3+2\sqrt{3}}{4} \pi - \frac{3}{2} \ln 2. \quad 2429. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2a^{2n-1}}. \quad 2430. n!$$

$$2431. \frac{n!}{2}. \quad 2432. (-1)^n n!$$

$$2433*. a) \frac{(m-1)(m-3) \dots 3 \cdot 1}{m(m-2) \dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}; \quad 5) \frac{(m-1)(m-3) \dots 4 \cdot 2}{m(m-2) \dots 3 \cdot 1}$$

Staviti $x = \sin \varphi$. 2434*. $2 \frac{2n(2n-2) \dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 3 \cdot 1}$. Staviti $x = \sin^2 \varphi$.

$$2435. \frac{\pi - \alpha}{\sin \alpha} \text{ (za } \alpha = \pi l - 1).$$

2436*. Jednakost integrala dokazuje se tako što se u jedan od njih uvodi smena

$x = \frac{1}{z}$, a zatim se izračunava njihov zbir koristeći pritom identičnost

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}} \right).$$

2437*. Predstaviti integral u obliku zbira dva integrala: $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$; u drugi integral

staviti $x = \frac{1}{y}$. 2438. 0. 2439. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

2440. $\sqrt{\pi}$. 2441*. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Primeniti parcijalnu integraciju.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad 2443. \frac{\pi}{2}.$$

2444. $\frac{\pi}{2}$, ako je $a > 0$; 0, ako je $a = 0$; $-\frac{\pi}{2}$, ako je $a < 0$.

2445. $\frac{\pi}{2}$, ako je $a > b$; $\frac{\pi}{4}$, ako je $a = b$; 0, ako je $a < b$.

2446*. $\frac{\pi}{2}$. Integrirati parcijalno.

2447*. $\frac{\pi}{4}$. Predstaviti brojitelj u obliku razlike sinusa višestrukih uglova.

2448*. $\frac{\pi}{4}$. Primeniti iste metode kao i u zad. 2446 i 2447.

2449*. Stavljajući $y = \frac{\pi}{2} - z$ dobija se: $\varphi(x) = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln \sin z \, dz$. Ovaj se integral, primenom obrasca $\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}$ razbija na tri intervala, od kojih se onaj prvi izražava neposredno; druga dva intervala se zamenu promjenljivih svode na integrale istog tipa kao i polazni. $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 2451. $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$. 2452*. $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Primeniti parcijalnu integraciju.

2453*. $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Smenom promjenljive svodi se na prethodni zadatak. 2454. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.